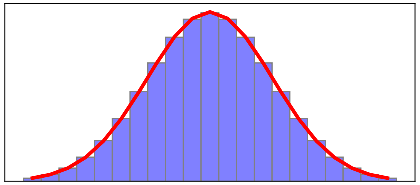
Variables à densité

Chapitre 12

I Densité

Commentaires :

Nous avons vu, dans le cadre des variables aléatoires finies (par exemple pour la loi binomiale), qu'en établissant, dans certains cas, l'histogramme des probabilités d'une variable $X \hookrightarrow B(n,p)$ (ci-contre $n = 100,\ p = 0,5$), on obtient un graphique pouvant être approximativement délimitée par une courbe (cf ci-contre).



La courbe donnée en exemple ci-dessus (qui donne les "bords" de l'histogramme) admet donc une aire égale environ égale ici à la "somme totale de l'aire des rectangles", c'est-à-dire, la somme de toutes les probabilités : 1. De même, la probabilité d'obtenir par exemple 4 succès pourrait être environ obtenue par une intégrale par un morceau d'aire sous la courbe (entre 2 bornes).
Concernant les variables discrètes, une telle courbe n'est qu'approximative, mais il existe d'autres variables, dont le comportement est plus excatement décrit par ce type d'objet (que nous appellerons des densités). C'est ce que nous verrons dans ce chapitre.

I-1 Définitions et généralités

Définition

On appelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une *densité* si f est une fonction

- positive,
- continue (sauf peut être en un nombre fini de points),
- d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Remarque :

Notons qu'en terme de calcul, si f est continue sauf en un nombre fini de points et si est nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$, l'étude de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est réduite à l'étude de $\int_a^b f$.
En effet, l'étude de $\int_{-\infty}^{a} f = \int_{-\infty}^{a} 0$ ainsi que $\int_b^{+\infty} f = \int_b^{+\infty} 0$ est triviale. Ces deux intégrales sont convergentes et valent toutes deux 0. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge ssi $\int_a^b f$ converge et les deux integrales ont même valeur.

Exemple 1 :

La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité :

En effet, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, positive sur $\mathbb{R}$ et de plus, on sait que

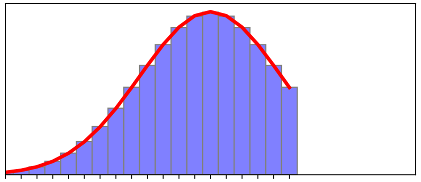
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

Commentaires :

Nous allons commencer à voir comment ces fonctions dites "densités" vont en effet pouvoir décrire en des lois de probabilités et comment nous pouvons nous en servir précisément.

Or, on rappelle que toute loi de variable aléatoire peut être décrite par une fonction de répartition et réciproquement. Nous allons donc établir un lien entre "densité" et "fonction de répartition".

Sur le schéma ci-dessous, on rappelle que la valeur de la fonction de répartition $F(x)$ de la loi donnée correspond à l'aire des "barres" :



Théorème 1

Soit f une densité.
La fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \end{array}$ *est une fonction de répartition car :*

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- *F est croissante.*
- *F est continue (donc continue à droite) en tout point de $\mathbb{R}$*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0\,;\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Démonstration :

Pour commencer , comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, cela signifie que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii) Montrons que F est croissante :

f est positive, donc, si $u \leqslant v$, par convergence des différentes intégrales, la relation de Chasles nous dit que

$$F(v) = \int_{-\infty}^{v} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{u} f(t)\,dt}_{=F(u)} + \underbrace{\int_{u}^{v} \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0}\,dt}_{\geqslant 0 \text{ (bornes croissantes)}}$$

D'où

$$F(u) \leqslant F(v)$$

ce qui donne la croissance de F.

iv) Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,;\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$:

D'une part, par hypothèse, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$

D'autre part, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{0}^{x} f(t)\,dt}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{} \int_0^{-\infty} f(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

i) Montrons que $0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. : Conséquence immédiate de $ii)$ et $iv)$.

iii) La continuité : Pour tous $a, x \in \mathbb{R}$, par convergence et relation de Chasles, on a

$$|F(x) - F(a)| = \left|\int_{a}^{x} f(t)\,dt\right|$$

Soit $\Delta = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sont les points de discontinuité éventuels de f, classés par ordre croissant : $a_1 < \ldots < a_n$. Pour les besoins d'écriture, on écrit $a_{n+1} = +\infty$

· Si $a \notin \Delta$, la limite quand $x \to a$ ne pose pas de problème, puisque, pour x proche de a, c'est une intégrale classique. La limite vaut 0.

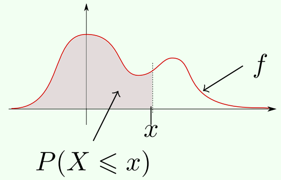
· Si $a = a_i \in \Delta$, pour x proche de a, c'est une intégrale impropre dont le seul problème est en a. On a

$$|F(x) - F(a)| = \left|\int_{a_i}^{x} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt - \int_{x}^{a_{i+1}} f(t)\,dt\right|$$

C'est mainenant par hypothèse de convergence qu'elle tend vers 0 quand $x \to a = a_i$. □

Définition

On dit que la variable aléatoire X *"est de densité f"* ou *"admet une densité f"* si :



- f est une densité
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f$

i.e. $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ est une fonction de répartition de X.

Remarque :

Il n'y a pas unicité de la densité possible pour une variable aléatoire . En effet, celle-ci est définie à un nombre fini de points près. En effet, si on modifie la valeur d'un nombre fini de points de f, ceci ne change pas la valeur de l'intégrale. Néanmoins, on fait généralement toujours en sorte que la densité soit "la plus continue possible" afin de ne pas compliquer les situations.

■ **Exemple 2** :

Loi uniforme sur $]0;1]$:

Supposons que X désigne un nombre pris au hasard dans l'intervalle $]0;1]$.

Rappelons sa fonction de répartition F_X : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Posons f telle que $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

⋆ Densité : f est une densité *(laissé en exercice)*

⋆ Fonction de répartition : Vérifions que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = F_X(x)$:

Si $x < 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0 = 0 = F_X(x)$

Si $x \in [0,1]$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = \int_{0}^{x} 1 = x = F_X(x)$

Si $x > 1$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = \int_{0}^{1} 1 = 1 = F_X(x)$

Ainsi, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et ainsi, X est de densité f.

Théorème 2

Pour toute densité f, il existe une variable aléatoire X telle que X soit une variable de densité f.

Démonstration : admise. □

Sans préciser la densité :

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X *"est à densité"* ou *"admet une densité"* s'il existe une densité f telle que X est de densité f.

- **Exemple 3** :

La variable aléatoire qui donne un nombre aléatoire dans l'intervalle $]0,1]$ est à densité.

I-2 Si je sais qu'une variable admet une densité

Propriété 3

Si X est une variable aléatoire à densité, alors F_X est continue.

`Démonstration :`

C'est la propriété iii) du théorème de la page 1 ! $\square$

Confusions

Il s'agit là bien de la fonction de répartition et non de la densité, qui elle, peut avoir des points de discontinuité.

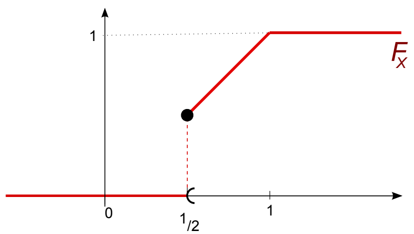
Corollaire

Une variable aléatoire finie ne peut jamais être à densité.

`Démonstration :`

La fonction de répartition d'une variable aléatoire finie est en escalier... $\square$

- **Exemple 4** `Variable aléatoire qui n'est ni finie ni à densité :`



On considère les deux expériences suivantes :

expérience(1) :
donne avec certitude le nombre $\frac{1}{2}$.
expérience(2) :
donne un nombre au hasard entre $\frac{1}{2}$ et 1.

On choisit au hasard d'appliquer expérience(1) ou expérience(2) et on note X le résultat obtenu.

La fonction de répartition est ci-dessus *(on pourra éventuellement la prouver un peu plus tard, quand on aura parlé des variables uniformes sur des intervalles quelconques.*

La variable n'est pas à densité (fonction de répartition non continue ...)

Corollaire

Si X est une variable aléatoire à densité, $P(X=x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

`Démonstration :`

Nous avons vu précédemment que

$$P(X=x)=P(X\leqslant x)-P(X<x)=F_X(x)-P(X<x)$$

et que de ce fait, $P(X=x)$ correspondait à la "hauteur de discontinuité" de F_X en x. S'il n'y a pas de discontinuité, ceci vaut donc 0. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par propriété des probabilités, on a toujours

$$P(X=x)=P(X\leqslant x)-P(X<x)=F_X(x)-P(X<x)$$

Or, nous avons observé que

$$P(X<x)=\lim_{t\to x, t<x}P(X\leqslant t)=\lim_{t\to x, t<x}F_X(t)$$

Ainsi, par continuité de F_X, on obtient

$$P(X<x)=F_X(x)=P(X\leqslant x).$$

D'où $$P(X=x)=0 \square$$

Corollaire

Si X est une va de densité f, de probabilité p et de fonction de répartition F_X, alors, pour tous $a,b\in\bar{(\mathbb{R})}$, avec la notation $F(+\infty)=1$ et $F(-\infty)=0$:

- $P(]-\infty;x])=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.
- $P(a\leqslant X\leqslant b)=\displaystyle\int_{a}^{b}f(t)\,dt$ *pour tout* $a,b\in\mathbb{R}$.
- $P(X=a)=0$ *pour tout* $a\in\mathbb{R}$.
- $$\int_a^b f(t)\,dt=F_X(b)-F_X(a)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X\leqslant b)$$
  $$=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)$$

`Démonstration :` exercice. $\square$

Proposition 4

On se donne X une variable aléatoire de densité f, alors, en tout point x où f est continue,

$$\begin{cases} F_X \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } x \\ F'_X(x)=f(x) \quad \text{(i.e. } F_X \text{ est une primitive de } f.) \end{cases}$$

Démonstration :

Posons $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ en les points cités. Soit donc $x \in \mathbb{R}$ tel que f soit continue en x.
On note $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta = \{a_1, \ldots, a_n\}$ l'ensemble fini des points de discontinuité de f, numérotés de façon à avoir $a_i < a_{i+1}$. On note $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Alors il existe $i \in [\![0, n]\!]$ tel que

$$a_i < x < a_{i+1}$$

On pose

$$\alpha \in]a_i, a_{i+1}[\quad \text{une valeur constante quelconque.}$$

On a alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{x} f = F(\alpha) + \int_{\alpha}^{x} f$$

Comme f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ avec $\alpha, x \in]a_i, a_{i+1}[$, on sait que $\varphi : x \in]a_i, a_{i+1}[\mapsto \int_{\alpha}^{x} f$ est une primitive de f sur $]a_i, a_{i+1}[$ (et donc en particulier $\mathcal{C}^1$.)

Comme, $F(\alpha)$ est une constante par-rapport à x, par somme, F est $\mathcal{C}^1$ en x avec

$$F'(x) = f(x)$$

□

Exemple 5 :

Soit X une variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Déterminons la fonction de répartition de X.

On note que f est continue sur $\mathbb{R}$. On note F_X la fonction de répartition de X sur $\mathbb{R}$. Comme F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Par primitive (sur les intervalles ouverts... !), on sait qu'il existe a, b tels que

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-t} + a & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} + b & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Or, la fonction de répartition doit vérifier $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, ce dont on déduit, par passage à la limite dans la formule de F_X :

$$b = 0$$

De même,

$$\lim_{+\infty} F_X = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1$$

On a donc

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La fonction F_X étant nécessairement continue à droite (et même continue sur $\mathbb{R}$ car X est à densité), on peut tout simplement poser

$$\boxed{F_X : t \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}}$$

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$. Déterminer la fonction de répartition de X.

Solution

On note que f est continue sur $\mathbb{R}$. En notant F_X la fonction de répartition de X, on sait que

$$F_X'(x) = f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On note F_X la fonction de répartition de X sur $\mathbb{R}$. Comme F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, par primitive, On sait alors qu'il existe a tel que

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + a$$

Or, la fonction de répartition doit vérifier $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$. ce dont on déduit, par passage à la limite dans la formule de F_X :

$$a = \frac{1}{2}$$

Corollaire

Soit X une variable aléatoire de densité f et $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ $(a<b)$. Alors,

$$Supp(X) \subset [a, b] \iff f = 0 \text{ en tout point de continuité dans } \mathbb{R} \backslash [a, b]$$

Remarque :

Dans les ouvrages de probabilités, l'écriture "$Supp(X) \subset [a, b]$" est généralement remplacée par

$$a \leqslant X \leqslant b \qquad p.s.$$

où "p.s." signifie "presque sûrement", ce qui signifie que la probabilité de l'événement "$a \leqslant X \leqslant b$" est 1 ; autrement dit, qu'on est quasiment certain que X sera borné par a et b. En pratique, par abus de notation, on se passe souvent de la notation "p.s." pour ne dire que $a \leqslant X \leqslant b$.

Démonstration :

- Supposons que la variable X soit bornée par a, b, i.e. $Supp(X) \subset [a, b]$.

Alors, en notant F_X la fonction de répartition de X, on a

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Or, X est une variable à densité et F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; a[\cup]b, +\infty[$. On peut donc en déduire qu'en tout point de continuité de f en dehors de $[a, b]$, on a

$$f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- Supposons que $f=0$ sur $]-\infty;a[\cup]b,+\infty[$.

On note F_X la fonction de répartition de X. f étant continue sur $]-\infty;a[\cup]b,+\infty[$, on sait que F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;a[\cup]b,+\infty[$. Ainsi, par primitive de la fonction nulle, il existe deux constantes $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ telles que

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}\alpha & \text{si } x<a\\ \beta & \text{si } x>b\end{cases}$$

Les limites de F_X en $-\infty$ et $+\infty$ donnent alors $\alpha=0$ et $\beta=1$. Par continuité de la fonction de répartition, on en déduit que

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant a\\ 1 & \text{si } x\geqslant b\end{cases}$$

Ainsi,

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=F_X(b)-F_X(a)=1-0=1$$

La démonstration pour f non continue en dehors de $[a,b]$ est admise. □

Exemple 6 :

Reprenons la densité

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 1 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0 & \text{si } t>1\end{cases}$$

et déterminons cette fois-ci la fonction de répartition F de X de densité f grâce aux techniques que nous venons de voir :

Tout d'abord, nous constatons sur la fonction densité f, qui est nulle sur $\mathbb{R}-[0,1]$, que

$$Supp(X)\subset[0,1]$$

et donc

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 1 & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

Si $t\in]0,1[$, f étant continue sur cet intervalle, on sait que $F'(t)=f(t)$. Ainsi, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$F(t)=t+\alpha$$

La continuité de F en 0 nous donne alors

$$0=\lim_{0^-}F=F(0)=\lim_{0^+}F=\alpha$$

En conclusion, on a encore une fois

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ t & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1\\ 1 & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

I-3 Si je veux montrer qu'une variable admet une densité

On se demande ici comment déterminer si une variable est à densité, et de surcroît, déterminer cette densité.

Proposition 5

On se donne X une variable aléatoire de fonction de répartition F. Si F est
. **continue sur tout** $\mathbb{R}$
. et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points $a_1,\ldots a_n$,
alors X est une va à densité de densité f telle que

$$f(x)=F'(x)\qquad\forall x\neq a_1,\ldots,a_n$$

(les valeurs de $f(a_1),\ldots,f(a_n)\geqslant 0$ pouvant être choisies arbitrairement.)

Bien penser à toutes les conditions
On ne peut pas retirer la condition "continue sur tout $\mathbb{R}$".

Démonstration :

f est une densité de X ssi
i) f est continue sauf en un nombre fini de points et positive.
ii) $\int_{-\infty}^{+\infty}f$ est convergente de valeur 1
iii) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f$ pour tout x.

- Cas de $i)$:

f est définie par $f(x)=F'(x)\quad\forall x\neq a_1,\ldots,a_n$ avec F et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points $a_1,\ldots a_n$. Ainsi, par hypothèse, f est continue sauf éventuellement en $a_1,\ldots,a_n$ par définition.
De plus, F étant croissante, $f=F'$ est bien positive pour tout $x\neq a_1,\ldots,a_n$. Les valeurs de $f(a_1),\ldots,f(a_n)$ sont ensuite choisies arbitrairement.

- Cas de $ii)$:

Quitte à renommer les points, on peut supposer que $a_1<\ldots<a_n$. On note $a_0=-\infty$ et $a_{n+1}=+\infty$

On note également

$$F(a_0)=\lim_{t\to a_0}F(t)=\lim_{t\to-\infty}F(t)=0$$

et

$$F(a_{n+1})=\lim_{t\to a_{n+1}}F(t)=1$$

⋆ Étude de $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}}f(t)\,dt$ pour $i=0,\ldots,n$:

On pose $f(x)=F'(x)\quad\forall x\neq a_1,\ldots,a_n$ et $f(a_1),\ldots,f(a_n)$ quelconques. Alors, sur chaque intervalle $]a_i,a_{i+1}[$, F est une primitive de f. Aussi, on a

$$\int_u^v f(t)\,dt=F(u)-F(v)\quad\forall u,v\in]a_i,a_{i+1}[$$

Il y a donc deux problèmes de convergence éventuels (a_i et a_{i+1}). Comme F est continue, les limites en a_i et a_{i+1} existent, ainsi, $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt$ est convergente et vaut, par passage à la limite en $u \to a_i$ et $v \to a_{i+1}$:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt = F(a_{i+1}) - F(a_i) \quad \text{car } F \text{ continue}$$

Chaque morceau $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f$ étant convergent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergent, avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f = \sum_{i=0}^{n} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) = F(a_{n+1}) - F(a_0) = 1 - 0 = 1$$

En conclusion, f est bien une densité.

- Cas de *iii)*

D'après ce qui précède, on sait que $\int_{-\infty}^{x} f$ converge. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n}]a_i, a_{i+1}[=]-\infty, +\infty[$, il existe $i \in \{0, \dots, n+1\}$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}[$. Alors

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a_1} f + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f + \int_{a_i}^{x} f$$

Or, on a vu ci-dessus que $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f = F(a_{i+1} - F(a_i)$ ainsi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a_1} f = F(a_1)$.
Le même principe que dans ce qui précède permet également de montrer que

$$\int_{a_i}^{x} f = F(x) - F(a_{i+1})$$

D'où $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(a_1) + \sum\limits_{k=1}^{i-1} (F(a_{i+1} - F(a_i)) + F(x) - F(a_{i+1}) = F(x)$

- En conclusion

on vient de montrer que F était bien associée à la fonction densité f. □

■ Exemple 7 :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \ln t & \text{si } t \in [1, e[\\ 1 & \text{si } t > e \end{cases}$$

Dire si X est à densité et si c'est le cas, la déterminer.

- *X est à densité :*

On observe que F est une fonction de répartition continue sur $]-\infty, 1[$, $[1, e[$ et $[e, +\infty[$.
En 1^- : $\lim\limits_{1^-} F = 0 = \ln 1 = F(1)$. Ainsi, F est continue en 1^- (et en 1^+) d'après la remarque précédente, donc continue en 1.
En e^- : $\lim\limits_{e^-} F = \ln e = 1 = F(1)$. Ainsi, F est continue en e^- (et en e^+) d'après la remarque précédente, donc continue en e.
En conclusion, F est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points : 1 et e.
On peut donc dire que

$$\boxed{X \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

- Calcul de la densité :

On note f_X une densité de X. On a alors, pour tout $t \neq 1, e$,

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in]1, e[\\ 0 & \text{si } t > e \end{cases}$$

On peut ensuite choisir arbitrairement les valeurs de $f(1)$ et $f(e)$. On propose par exemple

$$\boxed{f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1, e] \\ 0 & \text{si } t > e \end{cases}}$$

Définition

Si une variable aléatoire X est à densité, *donner la loi de X* signifie "prouver qu'elle admet une densité et la donner.

Exercice 2

Reprendre l'exemple de la variable X qui suit une loi uniforme donnée par la fonction de répartition $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Montrer (cette fois-ci à l'aide de la technique précédente), que X est une variable à densité, puis déterminer (à nouveau) sa densité.

Solution

On a précédemment montré que X était à densité, notée ici f, avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

II Moments, Espérance et variance

Dans tout ce paragraphe, sauf mention faite du contraire, on supposera que X est une variable aléatoire à densité.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. On dit que *X admet une espérance* (ou que $\mathbb{E}[X]$ existe) si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$ existe. On appelle alors espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ la valeur

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

■ **Exemple 8** :

Si X est une variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$, alors elle n'admet pas d'espérance.

En effet, on observe que

$$|t| f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t} \geqslant 0$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t}\, dt$ diverge, donc il en va de même de $\int_1^{+\infty} |t| f(t)$, et donc de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)$.

Définition

Si X est une var à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit qu'elle est *centrée*.

Propriété 6

On suppose que X est une var à densité qui admet une espérance. Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Démonstration : exercice. □

Remarque :

Il n'existe pas de variable **positive** et à densité d'espérance nulle :

En effet, supposons que X soit positive et à densité (on la suppose continue. Alors elle admet une densité f telle que $f = 0$ sur $]-\infty; 0[$. Alors

$$0 = \mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \underbrace{x f(x)}_{\geqslant 0}\, dx$$

Ainsi, $xf(x)$ est une fonction nulle sur $]0; +\infty[$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points). On suppose ici pour faciliter l'écriture qu'elle est nulle partout sur $]0; +\infty[$. On en déduit, par primitive, que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne une fonction de répartition non continue sur $\mathbb{R}$, ce qui est impossible pour une variable à densité...

Théorème 7 ("linéarité")

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires admettant chacune une espérance.

- *Alors $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$;*
- *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ est une variable à densité et $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$*

Démonstration :

(premier point admis) et deuxième en exercice. □

Gare aux affirmations hatives !

On ne dit pas que $X+Y$ est forcément une variable à densité, mais seulement que l'espérance existe :

Par exemple, si X est une variable à densité, $-X$ également, mais

$$X + (-X) = 0$$

C'est une variable constante ; donc finie et non à densité.

Théorème 8 *de transfert*

Si X est une variable aléatoire réelle de densité f, ainsi qu'un intervalle I tel que $\varphi : I \to R$ une fonction continue (sauf en un nombre fini de points). Alors

$$\varphi(X) \text{ admet une espérance ssi}$$

$$\begin{cases} \text{il existe un intervalle ouvert }]a,b[\text{ tel que } Supp(X) \subset]a,b[\subset I \\ \text{et } \displaystyle\int_a^b |\varphi(x)|\, f(x)\, dx \text{ converge} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx$$

Démonstration :

- Cas $\varphi \in \mathcal{C}^1$ bijective croissante. Densité de $\varphi \circ X$:

$$P(\varphi(X) \leqslant x) = P(X \leqslant \varphi^{-1}(x)) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(x)} f(t)\, dt$$

On pose $t = \varphi(u)$, alors $dt = \varphi'(u)\, du$, d'où

$$\int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(x)} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} f(\varphi(u))\varphi'(u)\, du$$

Une densité de $\varphi \circ X$ est donc $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t) \geqslant 0$.
$\varphi \circ X$ admet donc une espérance ssi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx \text{ existe}$$

Le changement de variable dans le sens inverse donne le résultat escompté.

- les autres cas sont admis. □

Remarque :

Le théorème de transfert nous dit en particulier que **l'existence** de l'espérance d'une v.a. X est équivalente à l'existence de celle de $|X|$. De plus, on a la propriété suivante :

■ Exemple 9 :

Soit X une variable de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Alors la variable $X^3 \ln(1+|X|)$ admet une espérance :

En effet, d'après le théorème de transfert, $X^3 \ln(1+|X|)$ admet une espérance ssi $\frac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^3 \ln(1+|t|)|e^{-|t|}\, dt$ converge, ce qui ici, par parité de la fonction (et ensuite remplacement de la valeur absolue dans l'intégrale), revient à la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \ln(1+t)e^{-t}\, dt$.
La fonction dans l'intégrale est continue sur $[0, +\infty[$, et on a

$$0 \leqslant t^3 \ln(1+t)e^{-t} \leqslant t^3 t e^{-t} = t^4 e^{-t} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad (exo)$$

Or, d'après le cours, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t}\, dt$ converge. Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on sait alors que I converge et que donc l'espérance existe.

Propriété 9

Si X admet une espérance, alors $|\ \mathbb{E}[X]\ | \leqslant \mathbb{E}[\ |X|\ ]$

Démonstration :

D'après le théorème de transfert, $|X|$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$ converge. Or, c'est exactement la même condition que pour l'existance de l'espérance de X.
De plus, toujours par ce même théorème, cette valeur correspond à $\mathbb{E}[\ |X|\ ]$. Voyons maintenant la comparaison des valeurs :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$

ainsi, comme f est positive, $\quad -|x|f(x) \leqslant xf(x) \leqslant |x|f(x)$

D'où, par convergence de toutes les intégrales, $-\mathbb{E}[\ |X|\ ] \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[\ |X|\ ]$. □

■ Exemple 10 :

Dans l'exemple précédent, étant donné que

$$|X^3 \ln(1+|X|)| \leqslant X^4 \quad (exo)$$

et que $\mathbb{E}[X^4]$ existe et vaut $\frac{4!}{1^4} = 24$ (exo) on en déduit que

$$|\mathbb{E}[X^3 \ln(1+|X|)| \leqslant 24$$

Commentaires :

Le théorème de transfert légitime également la définition suivante :

Définition

Si X^n admet une espérance (i.e. si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n f(x)\,dx$ cv), on dit que le moment d'ordre n existe et on appelle $\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$ le *moment d'ordre n* de la variable X

Théorème 10

Si X est une variable aléatoire bornée à densité, alors elle admet des moments de tout ordre.

Démonstration :

Soit M un majorant de $|X|$ et f la densité de X. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$
Comme on a $Supp(X) \subset [-M, M]$, la densité f est nulle en dehors de $[-M, M]$.
Ainsi, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n f(x)dx$ équivault à celle de $\int_{-M}^{M} |x|^n f(x)dx$.
Or, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|x|^n f(x) \leqslant M^n f(x)$$

on en déduit, comme $\int_{-M}^{M} f$ converge, par théorème de comparaison des intégrales, que $\int_{-M}^{M} |x|^n f(x)dx$ converge et donc que le moment d'ordre n existe. □

? Exercice 3

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{e^t - e}{e^e - e} \ln t & \text{si } t \in [1, e] \\ 1 & \text{si } t > e \end{cases}$$

Montrer que X admet des moments de tout ordre.

Solution

La variable est à densité et bornée car $1 \leqslant X \leqslant e$ *p.s.*, donc admet des moments de tout ordre.

Proposition 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si X^n admet une espérance, alors X^m admet également une espérance pour tout $0 \leqslant m \leqslant n$.

Définition

Si X^2 est intégrable, la quantité

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

existe et est appelée *variance* de X.
On appelle également $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ *l'écart-type* de X.

Propriété 12

Soient X admettant un moment d'ordre 2 et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a

1. $V(aX) = a^2 V(X)$.
2. $V(X + b) = V(X)$.

Démonstration : exercice. □

Propriété 13

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé.
H1 : Si les moments d'ordre 2 de X et Y existent
H2 : Si les variables X et Y sont indépendantes,
alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

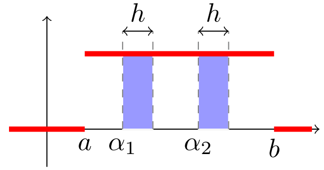
Démonstration : exercice. □

III Exemples fondamentaux

III-1 Loi uniforme

Commentaires :

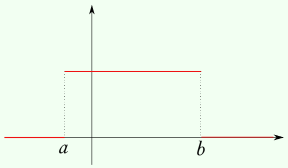
On cherche à décrire la loi d'une variable donnant un nombre au hasard dans un intervalle $[a, b]$. On sait qu'une densité existe pour l'intervalle $]0, 1]$ et on imagine donc qu'il en existe une sur $[a, b]$. Dans ce cas :
- *$Supp(X) \subset [a, b]$ donc la densité est nulle en dehors de $[a, b]$.*
- *Pour h constant, les probabilités du type $P(\alpha < X \leq \alpha + h)$ (aire sous la courbe densité entre α et $\alpha + h$) avec $a \leqslant \alpha < \alpha + h$ étant toutes identiques (par choix au hasard), on imagine que s'il y a une densité, elle doit nécessairement être constante.*



Définition et Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'elle suit une *loi uniforme* sur $[a,b]$ $(a<b)$ si elle admet comme densité la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que

$$f(t)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<a\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{si } t>b\end{cases}$$

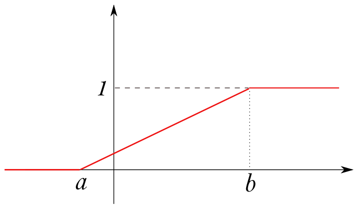


On note $\mathcal{L}(X)=\mathcal{U}_{[a;b]}$ ou $X\hookrightarrow\mathcal{U}_{[a;b]}$.

Démonstration :

On vérifie que c'est bien une densité $\square$

Fonction de répartition :



$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leqslant x<b\\ 1 & \text{si } x>b\end{cases}$$

Démonstration :

On note F la fonction de répartition de X. La fonction densité est continue sauf en 0 et 1. Ainsi, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et 1, avec F une primitive de f. Ainsi, il existe $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que :

$$F_X(x)=\begin{cases}\alpha & \text{si } x<a\\ \frac{x}{b-a}+\beta & \text{si } a<x<b\\ \gamma & \text{si } x>b\end{cases}$$

Les limites de F en $\pm\infty$ donnent $\alpha=0$ et $\gamma=1$. F est la fonction de répartition d'une variable à densité, ainsi, F est continue. La continuité en a donne alors

$$\beta=-\frac{a}{b-a}$$

D'où

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leqslant x<b\\ 1 & \text{si } x>b\end{cases}$$

Pour finir, la continuité en b permet de mettre une inégalité large sur $a\leqslant x\leqslant b$ ou $x\geqslant b$. $\square$

Commentaires :

X suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ peut être le résultat d'un tirage au hasard d'un nombre entre a et b.

Remarque :

On peut généraliser cette définition à toute loi uniforme sur $[a,b[$ ou $]a,b]$, ou encore $]a,b[$ en adaptant f, mais en réalité, c'est inutile, car les fonctions de répartition sont en réalité égales.

Proposition 14

Si $X\rightsquigarrow\mathcal{U}_{[a;b]}$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier,
$$\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}\text{ et } V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration :

On note $f=\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}$ la densité de X.
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x^n|f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b|x^n|\,dx\quad\text{existe}$$
alors $|X^n|$ et intégrable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- Espérance :
$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}[\frac{x^2}{2}]_a^b=\frac{a+b}{2}$$
- Variance :
$$\mathbb{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{b-a}[\frac{x^3}{3}]_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

D'où
$$V(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}$$

$\square$

Remarque : En particulier, si $X\rightsquigarrow\mathcal{U}_{[0;1]}$, on a $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{2}\qquad V(X)=\dfrac{1}{12}$.

Proposition 15

Soient $a<b\in\mathbb{R}$. Alors X suit une loi uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si $Y=(b-a)X+a$ suit une loi uniforme sur $[a,b]$.

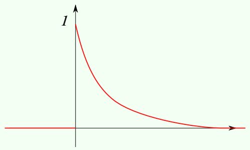
Démonstration : exercice. $\square$

III-2 Loi exponentielle

Définition et Proposition

Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle. On dit qu'elle suit une *loi exponentielle* de paramètre λ si elle admet comme densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

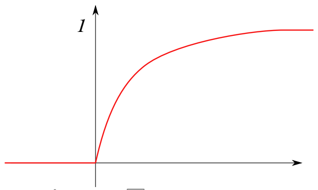
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$



On note $\mathcal{L}(X) = \varepsilon(\lambda)$ ou $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$.

Démonstration :
On vérifie que c'est bien une densité $\square$

Fonction de répartition :



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration : exercice. $\square$

Proposition 16

Si $X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda)$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier,
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \;;\quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration :
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ la densité de X.

. Existence des moments : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n| f(t)\, dt = \lambda \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\, dt$$
Cette intégrale est convergente (d'après les exemples usuels du chapitre précédent sur les intégrales.) On sait que plus que
$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\, dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$
Comme la variable X est positive, on peut réutiliser cette valeur pour calculer
$$\mathbb{E}[X^n] = \lambda \frac{n!}{\lambda^{n+1}} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

. Espérance :
$$\mathbb{E}(X) = I_1 = \frac{1}{\lambda} I_0 = \frac{1}{\lambda}$$

. Variance :
$$\mathbb{E}(X^2) = I_2 = \frac{2}{\lambda} I_1 = \frac{2}{\lambda^2}$$
D'où
$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$
$\square$

Propriété 17 *d'absence de mémoire*

Soit X suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $t, s > 0$, on a
$$P_{X>s}(X > t + s) = P(X > t)$$

Commentaires :

On peut interpréter ceci de la manière suivante :
Si X correspond au nombre de minutes d'attente avant l'arrivée d'un vendeur dans une boutique, quelqu'un qui déjà attendu pendant un temps s a exactement autant de chance d'attendre encore pendant un temps t qu'une autre personne qui vient d'arriver.

Exemple 11 :

Avec les notations de la propriété précédente, on a par exemple
$$P_{X>2}(X > 3) = P(X > 1)$$

Démonstration :
Par calcul :
$$P_{X>s}(X > t + s) = \frac{P(X > s \cap X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{e^{\lambda(t+s)}}{e^{\lambda s}} = P(X > t)$$
$\square$

Remarque :

La seule loi discrète à avoir cette même propriété est la loi géométrique. En effet, rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors on a également Pour tout $t, s > 0$, on a
$$P_{X>s}(X > t + s) = P(X > t)$$

Confusion

La propriété d'absence de mémoire ne dit en aucun cas qu'il y a égalité entre $P_{X>2}(X > 3)$ et $P(X > 2)$. En effet, ceci signifierait plutôt que les événements $(X > 2)$ et $(X > 3)$ sont indépendants, ce qui n'est pas du tout le cas.

III-3 Loi normale

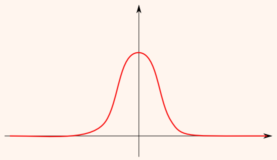
III.3-a) Loi normale centrée réduite

Théorème 18

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

est une densité de probabilité



Démonstration : admise. □

Définition

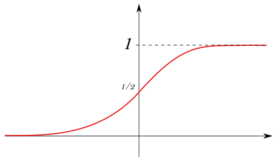
On dit qu'une variable aléatoire réelle suit une *loi normale centrée réduite* si elle admet comme densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On note $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Notation : Dans le cas particulier de la loi normale centrée réduite, on note Φ sa fonction de répartition.

Graphe de Φ :



Proposition 19

la fonction de répartition Φ de X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ vérifie :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\quad \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$
- $\forall x \geqslant 0,\ P(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$ et $P(|X| \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x))$.

Démonstration : admise. □

Proposition 20

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier, $\quad \mathbb{E}(X) = 0 \quad$ et $\quad \sigma(X) = 1$.

Démonstration :

- Montrons que X admet des moments de tous ordres :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge :

La fonction $x \mapsto |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, les seuls problèmes sont en $\pm\infty$. De plus, cette fonction est également paire, ce qui signifie que la convergence en $-\infty$ équivaut à la convergence en $+\infty$. Étudions donc la convergence de en $+\infty$.

Par croissance comparée, on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{4}} \cdot |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Il existe alors X tel que,

$$\forall x \geqslant X \qquad 0 \leqslant |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_X^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$ converge. On en déduit, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que

$$\int_X^{+\infty} |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \text{ converge}$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \text{ converge.}$$

- Si on ne veut démontrer que l'existence de l'espérance de X :

La fonction $x \mapsto |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, les seuls problèmes sont en $\pm\infty$. De plus, cette fonction est également paire, ce qui signifie que la convergence en $-\infty$ équivaut à la convergence en $+\infty$. Ainsi elle converge ssi elle converge en $+\infty$.

Soit $t \geq 0$. On a

$$\int_0^{+\infty} |x| f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^t = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$$

Ainsi, l'intégrale converge et donc $\mathbb{E}[X]$ existe.

- Calculons l'espérance de X.

Grace à la démonstration ci-dessus, on sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge (absolument). De plus, la fonction $x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire, ce qui entraîne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0$$

et donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0$$

- <u>Calculons l'espérance de X^2.</u>

Grace à la démonstration ci-dessus, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge. De plus, la fonction $x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire, ce qui entraîne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Effectuons une Ipp :

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = xe^{-\frac{x^2}{2}} & v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{où } u, v \in \mathcal{C}^1 \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ existe par croissance comparée, on a

$$\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$$

- <u>Finalement, la variance :</u>

Le moment d'ordre 2 existe, on peut donc appliquer la formule de la vairance :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1$$

□

——— Le calcul des valeurs précédentes avec Python :

Avec Python, on peut simuler une variable aléatoire suivant une loi normale ainsi que sa fonction de répartition ou l'inverse de sa fonction de répartition :

```
import scipy.stats as sc

va=sc.norm()     # on crée une v.a. du nom de va qui
    suit une loi N(0,1).

va.cdf(x)    # rend phi(x)
va.ppf(x)    # rend phi^{-1}(x)
```

Remarque :

Les abréviations ci-dessus correspondent aux termes suivants :

```
cdf     #  cumulative density fonction
ppf     #  percent point function
```

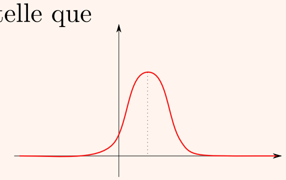
Pour le calcul des valeurs précédentes à la calculatrice, on se référerra à l'annexe de fin de chapitre.

III.3-b) Loi normale

Proposition 21

Soient $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



est une densité de probabilité

Démonstration :

On vérifie que c'est bien une densité : rappel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

Calculons $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt$:

Changement de variable $u = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$, d'où $\mathrm{d}u = \dfrac{t}{\sigma}\,\mathrm{d}t$, i.e. $\mathrm{d}t = \sigma\,\mathrm{d}u$. D'où (exercice)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,dt = \sigma\sqrt{2\pi}$$

□

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'elle suit une *loi normale* (ou gaussienne) de paramètres μ, σ si elle admet comme densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On note $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Proposition 22

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier,

$$\mathbb{E}(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2.$$

`Démonstration :`

- Existence des moments

On note $a, b \in \mathbb{R}$ et on considère l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |t|^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t$.
Effectuons un changement de variable

$$x = \frac{t-\mu}{\sigma}, \quad t = \sigma x + \mu \quad \mathrm{d}t = \sigma\,\mathrm{d}x$$

On obtient

$$\int_a^b |t|^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sigma \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} |\sigma x + \mu|^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \text{Or,} \quad 0 \leqslant |\sigma x + \mu|^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2} &\leqslant (\sigma|x| + |\mu|)^n e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sigma|x|)^k |\mu|^{n-k} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^k |\mu|^{n-k}\, |x|^k e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Or, on sait, d'après le cas des moments d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, que chacune des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, ce qui donne, par multiplication par les constantes et addition d'intégrales convergentes, la convergence de $\displaystyle\int \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^k |\mu|^{n-k}\, |x|^k e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$.
Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma x + \mu|^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

par passage à la limite quand $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on obtient donc la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t$.

- Espérance de X :

Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t$:
Servons nous du changement de variable effectué ci-dessus. On trouve, après passage à la limite,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t &= \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma x + \mu) e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\underbrace{=}_{\text{cv des int.}} \sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x}_{0} + \mu\sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x}_{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma\mu\sqrt{2\pi} = \mu$$

- Espérance de X^2 :

Le même changement de variables, connaissant la convergence de toutes les intégrales concernées, donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma x + \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \sigma^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x}_{1} + 2\sigma\mu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x}_{0} + \mu^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x}_{1} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

- variance de X :

Comme le moment d'ordre 2 existe, on peut appliquer la formule :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2$$

□

IV Opérations sur les variables aléatoires

IV-1 Multiplication et addition par un scalaire

? Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de densité f et $b \in \mathbb{R}$. Alors, une densité de $X + b$ est $h : x \mapsto f(x - b)$

Solution

Pour tout x, $F_{X+b}(x) = P(X + b \leqslant x) = P(X \leqslant x - b) = F_X(x - b)$

On sait, de plus, que F_X est dérivable sur $\mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}$, où les $a_1, \dots, a_n$ sont les éventuels points de discontinuité de f. Ainsi, en dérivant l'expression précédente, on trouve que, pour $\mathbb{R} - \{a_1 + b, \dots, a_n + b\}$,

$$F'_{X+b}(x) = f(x - b)$$

Ainsi, $X + b$ admet une densité, et celle-ci est

$$x \mapsto f(x - b)$$

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de densité f et $a \in \mathbb{R}^*$. Alors, une densité de aX est $h : x \mapsto \frac{1}{|a|} f(\frac{x}{a})$

Solution

- Si $a > 0$,
$F_{aX}(x) = P(aX \leqslant x) = P\left(X \leqslant \frac{x}{a}\right) = F_X\left(\frac{x}{a}\right)$

On sait, de plus, que F_X est dérivable sur $\mathbb{R} - \{a_1, \ldots, a_n\}$, où les $a_1, \ldots, a_n$ sont les éventuels points de discontinuité de f. Ainsi, en dérivant l'expression précédente, on trouve que, pour $\mathbb{R} - \{\frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_n}{a}\}$,

$$F'_{aX}(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ainsi, aX admet une densité, et celle-ci est

$$x \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

- Si $a < 0$,
à faire

Corollaire *1*

Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a alors

- $\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad aX \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(a\mu, (a\sigma)^2\right)$
- $\forall b \in \mathbb{R}, \quad X + b \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu + b, \sigma^2\right)$

Démonstration : exercice. □

Corollaire *2*

Soit $\lambda > 0$. Si X suit une loi expnentielle de paramètre λ, $(X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda))$ alors, pour tout $a > 0$,

$$aX \rightsquigarrow \varepsilon\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Démonstration :

$f_{aX}(x) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{x}{a}) = \frac{1}{|a|} \lambda e^{-\lambda \frac{x}{a}} = \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a} x}$ □

Remarque :

- $X + b$ ne suit pas une loi exponentielle si $b \neq 0$, car le support de $X + b$ n'est pas $[0; +\infty[$.
- De même, si $a < 0$, aX ne suit pas non plus une loi expontielle. (Dire pourquoi.)

IV-2 Somme de va indépendantes

Théorème 23 *de convolution*

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de densité f et g. Alors, $X+Y$ est une variable aléatoire de densité h telle que

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

Exemple 12 :

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des mêmes lois uniformes sur $[0; 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$. *(fait en classe)*

Après calcul (faits en classe) on a

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Corollaire

Si X_1, X_2 sont indépendantes et suivent respectivement des lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors

$$X + Y \text{ suit une loi } \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,dt$ où f_i est une densité de X_i.

Tout d'abord, soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_1(t)f_2(x-t) &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-t-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{t-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x-t-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

Or, en développant et en regroupant les termes suivant t, on trouve

$$\left(\frac{t-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x-t-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = at^2 + 2bt + c,$$

où

$$a = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}; \quad b = -\frac{1}{\sigma_1^2}\mu_1 - \frac{1}{\sigma_2^2}(x - \mu_2); \quad c = \frac{1}{\sigma_1^2}\mu_1^2 + \frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2$$

Mettons $-\frac{1}{2}(at^2+bt+c)$ sous forme canonique :

$$-\frac{1}{2}(at^2+2bt+c)=-\frac{a}{2}\left(t-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b^2-ac}{2a}$$

Dans l'intégrale, on obtient

$$h(x)=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a}{2}\left(t-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b^2-ac}{2a}}dt=\frac{1}{\sigma_1\sigma 2\pi}e^{-\frac{a}{2}\frac{b^2-ac}{2a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a}{2}\left(t-\frac{b}{a}\right)^2}dt$$

Or, reconnaissant la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\frac{b}{a},\frac{1}{a})$, on sait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a}{2}\left(t-\frac{b}{a}\right)^2}dt=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

D'où

$$h(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_1\sigma_2 2\pi\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{2a}}=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2a\pi}}e^{\frac{b^2-ac}{2a}}$$

- Calcul de $\sigma_1\sigma_2\sqrt{2a\pi}$:

Comme $a=\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}$, on a

$$\sigma_1\sigma_2\sqrt{2a\pi}=\sqrt{2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\pi}=\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

- Calcul de $\frac{b^2-ac}{a}$:

Comme

$$b=-\frac{1}{\sigma_1^2}\mu_1-\frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_2),\quad c=\frac{1}{\sigma_1^2}\mu_1^2+\frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2,\quad a=\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}$$

on a

$$\begin{aligned}
b^2-ac &= \left(-\frac{1}{\sigma_1^2}\mu_1-\frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_2)\right)^2-a\left(\frac{1}{\sigma_1^2}\mu_1^2+\frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\right)\\
&= \mu_1^2\underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_1^4}-\frac{a}{\sigma_1^2}\right)}_{-\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}+(x-\mu_2)^2\underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_2^4}-\frac{a}{\sigma_2^2}\right)}_{-\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}+2\frac{\mu_1(x-\mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\\
&= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\big(-\mu_1^2-(x-\mu_2)^2+2\mu_1(x-\mu_2)\big)\\
&= -\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\big(x-(\mu_1+\mu_2)\big)^2
\end{aligned}$$

Au final, on obtient

$$\frac{b^2-ac}{a}=\frac{-\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\big(x-(\mu_1+\mu_2)\big)^2}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}=-\frac{\big(x-(\mu_1+\mu_2)\big)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

En conclusion, la densité de $X+Y$ est

$$x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(x-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{\left(x-(\mu_1+\mu_2)\right)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

qui est bien la densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale

$$\mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

□

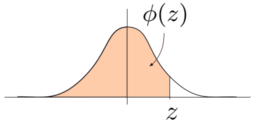
V Annexe : Tables et calculatrice

Table inverse de la loi Normale centrée réduite

z en fonction de α tel que $\alpha = P[Z \leqslant z] = \phi(z)$ pour $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.

$\alpha = \phi(z)$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	$0,95$	$0,96$	$0,97$	$0,975$	$0,98$	$0,99$	$0,995$
z	$0,524$	$0,842$	$1,282$	$1,645$	$1,751$	$1,881$	$1,960$	$2,054$	$2,326$	$2,576$

Table de la loi Normale centrée réduite



$\phi(z) = P[Z \leqslant z]$ en fonction de z pour $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Loi normale et calculatrice

On suppose ici que l'on dispose d'une variable X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de fonction de répartition F.

Calculs de probabilités :

$\boldsymbol{Calculer}\ \boldsymbol{P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)}$

Avec une TI

- Sélectionner le menu des lois de probabilités en tapant 2^{nd} + DISTR.
- Sélectionner `normalcdf` ou `normalFRep` suivant les modèles
- Compléter les paramètres

Remarque :

À ne pas confondre avec `normalpdf` qui donne les valeurs de la fonction densité et non celles de la fonction de répartition.

Avec une Casio

- Aller dans le menu STAT
- En bas de l'écran, sélectionner DIST puis NORM et enfin Ncd
- Compléter les paramètres

Remarque :

À ne pas confondre avec `Npd` qui donne les valeurs de la fonction densité et non celles de la fonction de répartition.

Avec une NumWorks

- Aller dans le menu `Probabilités`
- Choisir la loi normale
- Compléter les paramètres $\mu = ...,\ \sigma = ...$
- En haut à gauche, sélectionner le type d'inégalités $P(.. \leq X \leq ....)$
- compléter les paramètres de gauche et de droite dans $P(.. \leq X \leq ..)$

Exercice 6

Calculer $P(-2 \leqslant X \leqslant 3)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 2)$. ($\simeq 0,9044$)

$\boldsymbol{Calculer}\ \boldsymbol{P(X \leqslant b) = F(b)}$

Avec une TI ou une Casio

L'idée est de remplacer $P(X \leqslant b) = F(b)$ par $P(a < x \leqslant b) = F(b) - F(a)$ avec a très petit, de manière à avoir $F(a) \simeq 0$ négligeable.

- ⋆ Pour la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on peut prendre $a = -4$, i.e. $P(X \leqslant b) \simeq P(-4 < X \leqslant b)$
- ⋆ Pour les autres lois, ne pas hésiter à prendre par exemple $a = -10^{50}$: $P(X \leqslant b) \simeq P(-10^{50} < X \leqslant b)$

Avec une NumWorks

- Aller dans le menu `Probabilités`
- Choisir la loi normale
- Compléter les paramètres $\mu = ...,\ \sigma = ...$
- En haut à gauche, sélectionner si nécessaire le type d'inégalités $P(X \leq ....)$
- compléter le paramètre de droite dans $P(X \leq ..)$

Exercice 7

Calculer $P(X \leqslant 3)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 2)$. ($\simeq 0.92135$)

Et quand ce sont les probabilités qui sont données :

Calculer z tel que $P(X \leqslant z) = \alpha$, avec α fixé.

On remarque qu'il s'agit ici d'inverser la fonction de répartition F car on cherche $z = F^{-1}(\alpha)$.

Avec une TI

- Sélectionner le menu des lois de probabilités en tapant 2^{nd} + DISTR.
- Sélectionner `invNorm` ou `FracNormale` suivant les modèles
- Compléter les paramètres

Avec une Casio

- Aller dans le menu STAT
- En bas de l'écran, sélectionner DIST puis NORM et enfin InvN
- Compléter les paramètres

Avec une NumWorks

- Aller dans le menu `Probabilités`
- Choisir la loi normale
- Compléter les paramètres $\mu = ...$, $\sigma = ...$
- En haut à gauche, sélectionner si nécessaire le type d'inégalités $P(X \leq ....)$
- compléter la probabilité z dans $P(X \leq ..) = z$

Exercice 8

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, déterminer a tel que $P(X \leqslant a) = 0.7$. ($a \simeq 0,52$)

Calculer z tel que $P(|X - \mu| \leqslant z) = \alpha$, avec α fixé.

Avec toutes les calculatrices, on peut par exemple utiliser le fait que

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi,

$$P(|X-\mu| \leqslant z) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma} \leqslant \frac{z}{\sigma}\right) \quad \Leftrightarrow \quad P\left(|Z| \leqslant \frac{z}{\sigma}\right) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1 = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) = \frac{\alpha+1}{2}$$

Ainsi, **avec toutes les calculatrices**, on peut chercher $a = \frac{z}{\sigma}$ tel que $P(Z \leqslant a) = \frac{\alpha+1}{2}$.

Sinon, certaines calculatrices disposent de la version "centrée" qui permettent d'obtenir directement le résultat :

Il peut par exemple s'agir de sélectionner le type d'inégalité $P(.. \leqslant X \leqslant ..) = ..$ et de remplir la probabilité. On peut obtenir directement le z ou alors plutôt

$$a = \mu - z, \; b = \mu + z \;\text{ tels que }\; P(a \leqslant X \leqslant b) = \alpha$$

Exercice 9

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, déterminer b tel que $P(|X| \leqslant b) = 0.7$. ($b \simeq 1,036$)

Exercice 10

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1,4)$, déterminer c tel que $P(|X-1| \leqslant c) = 0.9$. ($c \simeq 3.2897$, ce qui donnerait $P(-2.2897 \leqslant X \leqslant 4.2897) \simeq 0.9$).)